

Modernité mathématique : Quelques invariants épistémologiques (*)

Hourya SINACEUR (**)

RÉSUMÉ. — Les mathématiques dites « modernes » sont entrées dans l'histoire, à la fin du XIX^e siècle, avec la théorie des ensembles infinis de Georg Cantor et Richard Dedekind. Elles se sont affirmées au début du XX^e siècle avec l'usage systématique de la méthode axiomatique et la définition des structures – algébriques et topologiques – qui furent le mot d'ordre de l'école de David Hilbert à Göttingen.

Cet article examine les options épistémologiques de la modernité mathématique, et spécialement celles qui furent partagées largement au-delà du cercle de Göttingen. Il tente de repérer transversalement la modernité, sans souci des frontières méthodiques, philosophiques, idéologiques ou circonstanciées. Ce qu'il vise, ce sont les invariants épistémologiques des pratiques et des argumentations mathématiques modernes. Sont ainsi retenus : le thème de l'autonomie des mathématiques, version sectorisée du thème plus général de l'autonomie de la science, celui de la promotion de l'analyse sémantique, de la productivité du langage, particulièrement important dans une science non expérimentale, celui enfin de l'utilité comme mesure de la valeur des théories.

MOTS-CLÉS. — Analyse sémantique ; autonomie ; autoréflexion ; interprétation ; langage ; signification ; structure ; utilité ; économie ; valeur.

SUMMARY. — *At the end of the 19th century, what is referred to as « modern » mathematics made its first appearance when Georg Cantor and Richard Dedekind introduced their theory of infinite sets. At the beginning of the 20th century, this mathematics became universalized, when the axiomatic method and the definitions of algebraic and topological structures, which were already household words at David Hilbert's school at Göttingen, became systematically used.*

(*) Cet article est une version remaniée et augmentée d'un exposé au colloque qui s'est tenu à l'université de Tokyo, en avril 1996, sur le thème « Traditions et modernité ». Je remercie les organisateurs d'en avoir permis une publication séparée.

(**) Hourya Sinaceur, CNRS-Université Paris-I, UMR 8590, Institut d'histoire et philosophie des sciences et des techniques, 13, rue du Four, 75006 Paris.
E-mail : sinaceur@canoe.ens.fr.

In this article, I examine the epistemological options of mathematical modernity – especially those that were widely shared beyond the Göttingen circle. I attempt to locate modernity transversally, without concern for methodical, philosophical, ideological, or circumstantial borders. What I aim at are epistemological invariants of modern mathematical practices and argumentation. I arrive at the themes of the autonomy of mathematics – which is a particular aspect of the general theme of the autonomy of science –, the promotion of semantic analysis, the productivity of language, which is particularly important in a non-experimental science, and, finally, the utility as the measure of the value of theories.

KEYWORDS. — *Semantic analysis ; autonomy ; self-reflection ; interpretation ; language ; significance ; utility ; economy ; value.*

Les mathématiques dites « modernes » sont entrées dans l'histoire, à la fin du XIX^e siècle, avec la théorie des ensembles infinis de Georg Cantor et Richard Dedekind. Elles se sont affirmées au début du XX^e siècle avec l'usage systématique de la méthode axiomatique et la définition des structures – algébriques et topologiques – qui furent le mot d'ordre de l'école de David Hilbert à Göttingen. L'école de Hilbert fut la référence et le modèle pour la réforme moderne des mathématiques en Europe, en Amérique et au Japon. Et Hilbert est certainement la figure dominante et pour ainsi dire emblématique de la modernité mathématique. Par ses travaux personnels qui inaugurèrent ou illustrèrent de façon éclatante les méthodes modernes, par ses prises de position sur les questions épistémologiques liées à l'avènement des mathématiques modernes, par sa façon d'intégrer délibérément ces questions dans la sphère mathématique, en construisant dans ce but une « nouvelle mathématique » – la métamathématique –, par son personnage, enfin, héritier de la philosophie des lumières, défenseur de la liberté de pensée, dédaigneux des traditions étroites, partisan de l'accès des femmes, en la personne d'Emmy Nøther, aux chaires universitaires.

Je vais m'intéresser aux thèmes épistémologiques associés aux mathématiques modernes, c'est-à-dire aux questions qu'à partir de celles-ci on peut poser sur la connaissance mathématique. Ces thèmes s'étagent en primaires et secondaires. Dans la première catégorie je comprends ceux qui ont émergé *directement* des nouvelles pratiques, suscitant des débats d'abord dans le milieu mathématique, gagnant ensuite des galons dans les travaux des historiens et les discussions des philosophes. Dans la seconde catégorie je range les thèmes nés d'une réflexion distanciée sur la pratique mathéma-

tique et se donnant volontiers pour philosophie réfléchie, lors même qu'ils furent introduits ou développés par des mathématiciens (comme David Hilbert ou Ludwig Ebertus Jan Brouwer). Bien entendu, la frontière est assez floue entre les deux catégories et certains thèmes relèvent des deux, primaires par certains de leurs aspects, secondaires par d'autres. Parmi les thèmes primaires, typique est celui du statut des objets mathématiques, et partant, celui du mode de définition ou de démonstration d'existence de ces objets. Ce thème est essentiellement alimenté par l'interrogation sur la légitimité de l'infini actuel et celle des démonstrations indirectes, qui ne fournissent pas un procédé de construction des objets dont elles démontrent – « par l'absurde » – l'existence. Là-dessus se greffe le débat sur le réalisme et le constructivisme, qui engage à choisir entre une ontologie et une épistémologie. Je n'évoque ces questions fondamentales de la philosophie mathématique que pour dire que je ne vais pas en traiter ici. Pas plus que je ne rouvrirai la question fort débattue de l'origine des axiomes et de la nature de l'intuition. Ici, je veux considérer un certain nombre de thèmes secondaires et, avant tout, celui de l'*autonomie* des mathématiques. Défendu par des mathématiciens et des philosophes d'orientations différentes, voire opposées, comme David Hilbert et Henri Poincaré ou Ludwig E. J. Brouwer d'un côté, Jean Cavaillès, Rudolph Carnap et Ludwig Wittgenstein de l'autre, ce thème apparaît *très généralement* accepté. Il me paraît comme le trait fondamental auquel se rattachent quelques autres qui dessinent le visage de la modernité mathématique. Parmi ces derniers je retiendrai ceux qui, par-dessus les oppositions polémiques, furent assumés tant par les adhérents que par les opposants – ou tenus pour tels – de l'école de Göttingen. Je chercherai en somme à repérer transversalement la modernité, sans souci des frontières méthodiques, philosophiques, idéologiques ou circonstantielles. Ce que je vise, ce sont les *invariants épistémologiques* des pratiques et des argumentations mathématiques modernes. Outre l'insistance sur l'autonomie des mathématiques, version sectorisée du thème – fort répandu au début de notre siècle – de l'autonomie de la science, je traiterai de la promotion de l'analyse sémantique, de la productivité du langage, particulièrement saillante dans une science dont les faits sont de l'ordre du langage, et de l'utilité comme mesure de la valeur des théories.

I. — LIBERTÉ DU CONCEPT ET AUTONOMIE DU SENS

Mathématique ou philosophique, la modernité s'est constituée dans l'héritage de la philosophie critique. Kant a consacré la rupture entre la connaissance humaine et l'Être ou Dieu. L'homme cesse alors de rechercher l'assurance ontologique et la garantie divine, et la science n'est plus le décryptage du « grand livre » de la nature, elle est *création*, œuvre de liberté humaine. De Karl Friedrich Gauss à Poincaré et Brouwer, en passant par Dedekind, Cantor et Hilbert, les mathématiciens modernes (1) ont souligné le plein exercice de la liberté de pensée mathématique. Sur la liberté tous sont d'accord ; sur son moteur la divergence est profonde. Les uns, Gauss, Dedekind, Poincaré et Brouwer (2), l'ont rapporté à l'initiative de l'esprit, illustrant avec des variantes la position kantienne. Les autres, cultivant un thème contraire au criticisme, y ont vu une dynamique objective, témoin de la puissance d'affirmation du mathématique en lui-même et de la générativité de ses concepts. La « libre mathématique » de Cantor est ainsi désignée par autoréférence à « la réalité *immanente* de ses concepts ». Son développement n'est « lié qu'à l'autoconsidération discursive, en ce sens que ses concepts, d'une part, sont en eux-mêmes dénués de contradiction, d'autre part, ont des relations solides, réglées par des définitions, avec les concepts construits antérieurement, déjà là et déjà éprouvés (3) ».

Toute référence à l'activité subjective est ici barrée au profit de règles objectives et de l'enchaînement des concepts dans la cohérence logique et la trame historique de l'expérience collective. Selon Cantor, la création est *autocréation* de la mathématique dans un mouvement historique et objectif. Prenant le relais, l'axiomatique

(1) Exception notable, Leopold Kronecker faisait du cœur des mathématiques, les nombres entiers, œuvre divine, tout le reste étant constitué de superstructures construites par les mathématiciens.

(2) Tous les quatre voient dans les nombres entiers, base de toutes les mathématiques, un « pur produit » (Karl Friedrich Gauss), « une libre création » (Richard Dedekind) de l'esprit humain. Brouwer associe, en outre, le produit de cet acte de l'esprit à l'intuition du temps, Poincaré à un jugement synthétique *a priori*.

(3) *Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts* (Hildesheim : Olms, 1966), 182.

de Hilbert aura beau s'appréhender elle-même comme le stade « critique » de la connaissance mathématique, elle ne fera que renforcer la force agissante et prescriptive des règles. Hilbert, qui désigne la mathématique comme fille du « pouvoir créateur de la pensée pure (4) », voudra explicitement néanmoins restaurer l'objectivité et « nous garder du subjectivisme, déjà perceptible dans les intuitions de Kronecker et à son comble dans l'intuitionnisme (5) ». C'est le règne de la mathématique sans mathématicien que Poincaré reprochait aux cantoriciens de promouvoir aux dépens de l'inspiration et de l'initiative du sujet mathématicien. Dans la postérité de Kant s'inscrit donc une bifurcation : le concept, soustrait à l'initiative du sujet, est objectivé dans la figuration symbolique et doué d'un pouvoir et d'un mouvement propres. Cela est un trait vraiment caractéristique du structuralisme mathématique du début de notre siècle.

C'est Bernard Bolzano qui a ouvert la brèche vers cette bifurcation et accompli une révolution, complémentaire pour une part de celle de Kant, contraire à elle pour une autre part. Le premier en effet, Bolzano affirme l'autonomie de la science et du concept par rapport au sujet pensant. Sa doctrine des propositions et représentations en soi introduit dans la tradition philosophique moderne la considération de significations objectives, constituées en objet *sui generis*, distinct des objets du monde, distinct de la pensée des objets et distinct de l'expression linguistique de la pensée. Parce que notre connaissance ne porte pas directement sur les choses (il n'y a pas de connaissance immédiate des choses), mais sur le sens des choses, s'impose une *instance sémantique autonome*, immatérielle mais objective, subsistant par soi et indépendamment du sujet, de l'objet et du langage. Là est le lieu propre de la vérité, ainsi ancrée dans la signification et non plus rapportée directement à l'Être et garantie par Dieu. Connaître c'est travailler le sens (6).

C'est dans ce cadre purement objectif que Bolzano réinterprète la formule de Kant, qui voyait dans les mathématiques « le plus

(4) Sur les problèmes futurs des mathématiques voir David Hilbert, *Compte rendu du II^e congrès international des mathématiciens* (Paris : Gauthier-Villars, 1902), 62.

(5) *Die Grundlagen der Mathematik. Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 6 (1928), 80 ; trad. franç. in Jean Largeault, *Intuitionnisme et théorie de la démonstration* (Paris : Vrin, 1992), 158.

(6) Voir le numéro spécial *Mathématique et logique chez Bolzano*, *Revue d'histoire des sciences*, 52 3-4 (1999).

éclatant exemple d'une raison pure qui s'étend d'elle-même avec succès, sans le secours de l'expérience ». Par raison pure, Bolzano entend l'exercice d'une connaissance conceptuelle totalement déconnectée de l'intuition et de la sensibilité. En tant que science purement *a priori*, les mathématiques procèdent (comme la philosophie) purement par concepts, c'est-à-dire par pensée de relations et de propriétés. Il est frappant de voir Poincaré affirmer lui aussi, plus tard, que la science est un système de relations et la réalité une réalité pensée (7), confirmant le primat, pour l'homme, du penser sur l'être. Grâce à l'intuition, qu'il tient pour la source primordiale des idées du mathématicien, Poincaré maintiendra cependant le double lien, rompu par Bolzano, de la pensée à l'esprit d'une part et à l'être d'autre part.

II. — L'ANALYSE SÉMANTIQUE COMME PROLÉGOMÈNE À TOUTE MATHÉMATIQUE RIGOUREUSE

Bolzano soustrait radicalement le concept à l'expérience. Les concepts ne sont ni abstraits de l'intuition (version aristotélicienne de l'empirisme) ni construits en elle (version kantienne). Si l'intuition est le théâtre de rencontre d'un sujet et d'un objet, alors le concept n'a rien à voir avec elle, indépendant qu'il est du sujet qui le pense, et distinct des objets subsumés par lui. Le concept appartient à la sphère sémantique ; car, s'il est composé, il est combinaison de concepts plus simples, et s'il est absolument simple, il est constitué au niveau sémantique : on ne peut le définir mais seulement le décrire en énonçant des propositions qui en *présentent* le terme dans des contextes variés. C'est au sein d'une matière propositionnelle, et non par référence à un objet extérieur, que se dégage le sens d'un concept primitif. Ainsi, le concept de point est induit à

(7) « Tout ce qui n'est pas pensée est le pur néant : puisque nous ne pouvons penser que la pensée et que tous les mots dont nous disposons pour parler des choses ne peuvent exprimer que des pensées ; dire qu'il y a autre chose que la pensée, c'est donc une affirmation qui ne peut avoir de sens » – Henri Poincaré, *La Valeur de la science* (Paris : Flammarion, 1970), 181-187.

partir de propositions telles que « le point est ce qui est simple dans l'espace », « il est la limite de la ligne et n'est pas lui-même une partie de la ligne », « il n'a d'étendue ni en longueur ni en largeur ni en profondeur », etc. La définition d'un concept composé exige, de même, le prélude d'une analyse sémantique (8). Prenons l'exemple favori des historiens des mathématiques : celui de la définition « purement analytique » du concept de fonction continue. Bolzano présente dans son *Rein analytischer Beweis* (1817) trois énoncés différents de la même vérité mathématique, communément appelée « théorème des valeurs intermédiaires ». Il faut distinguer les concepts clés de ces trois énoncés, afin d'éviter de les prendre l'un pour l'autre ou de faire de l'un d'eux un usage impropre ; ce sont dans l'ordre de généralité décroissante les concepts de polynôme, de fonction continue, de ligne continue. Bolzano observe que les démonstrations courantes du théorème des valeurs intermédiaires confondent le concept analytique de fonction continue et le concept géométrique de ligne continue ; de plus elles explicitent ce dernier grâce au concept cinématique de courbe tracée d'un seul trait par un mouvement ininterrompu ; enfin, pour le concept cinématique de mouvement, elles s'aident de la représentation sensible d'un corps mobile. Or le concept de mouvement est étranger aussi bien à la géométrie qu'à l'analyse, la représentation sensible étrangère à toute science conceptuelle, fût-elle une science appliquée comme la cinématique. Si l'on veut remettre la mathématique sur ses pieds et déterminer les connexions objectives entre ses concepts, il faut formuler une définition purement analytique du concept de fonction continue. De cette définition la courbe tracée d'un trait fournira seulement un exemple géométrique ; quant à la représentation sensible d'un corps mobile elle ne sera invoquée qu'à titre d'adjuvant psychologique.

Si l'une des composantes majeures de la modernité mathématique est bien la recherche de plus grande rigueur en analyse (ainsi fondée sur l'algèbre et l'arithmétique), alors il faut bien convenir que cette recherche s'accompagne d'une promotion de l'analyse

(8) Bernard Bolzano regrette que les penseurs de son époque (Immanuel Kant compris) « ne se sentent pas du tout liés ou du moins ne satisfont que très médiocrement aux règles jusque-là en vigueur de la *logique*, notamment au devoir de dire toujours précisément avec clarté *de quoi* l'on parle, en quel *sens* on prend tel ou tel mot, puis d'indiquer à partir de quelles *raisons* on affirme telle ou telle chose, etc. » (*Lehrbuch der Religionswissenschaft*, § 63). (Les termes soulignés le sont par Bolzano.)

sémantique et de son exploitation systématique par de nombreux mathématiciens. C'est l'un des aspects fondamentaux de la *réflexion sur elle-même* dont a pris l'habitude la mathématique moderne et dont Poincaré lui aussi, – qui ne se range naturellement pas dans la lignée de Bolzano ni dans celle de Cantor – reconnaît la nécessité et l'utilité (9).

Ne croyons pas que l'axiomatisation, qui apporte à l'auto-réflexion de la mathématique les armes du formel, vient contrarier cette promotion du sens au cœur du mathématicien. C'est tout le contraire. L'utilisation généralisée des symbolismes fait de la polysémie une *prédisposition* de tout discours. Canon de la mathématique formelle, *Les fondements de la géométrie* de Hilbert (1899) ne signifient pas la mort du sens, mais son autodétermination mathématique et son indépendance par rapport au monde extérieur et à la représentation que nous en avons (10). Dans une perspective ancienne, aristotélo-platonicienne, les entités mathématiques étaient conçues comme des objets stables que le mathématicien commence par définir et essaie ensuite de caractériser univoquement, pensant fournir ainsi une épure des objets du monde extérieur. Dans la perspective moderne, les axiomes définissent des structures polysémiques par référence à des modèles mathématiques familiers, déconnectés de leur possible légitimation externe. La dissolution de l'objet substantiel dans les structures formelles n'est pas perte, mais promotion du sens. La substitution des structures aux objets élémentaires a reporté l'attention du mathématicien de l'objet sur le sens, exactement comme Bolzano le montre en pratique (avec le *Rein analytischer Beweis*) et en théorie (avec la doctrine des significations objectives de la *Wissenschaftslehre*). Car les structures n'éliminent pas le sens ; elles se concentrent sur lui aux dépens de l'objet singulier. Si elles le mettent en suspens dans des formules

(9) « [...] la science mathématique doit réfléchir sur elle-même et cela est utile, parce que réfléchir sur elle-même, c'est réfléchir sur l'esprit humain qui l'a créée, d'autant plus que c'est celle de ses créations pour laquelle il a fait le moins d'emprunts au-dehors » (Henri Poincaré, *L'avenir des mathématiques*, *Atti del IV congresso internazionale dei matematici* (Roma : Accademia dei Lincei, 1908), 172).

(10) Le contenu mathématique de ces thèmes est analysé in Hourya Sinaceur, *Corps et modèles* (Paris : Vrin, 1991), part. II, chap. I et II ; Id., *De la géométrie formelle à l'algèbre abstraite*, in Luciano Boi, Dominique Flament, Jean-Michel Salanskis (eds), *1830-1930 : A century of geometry* (Berlin : Springer, 1992), ser. « Lecture notes in physics », n° 402, 167-174 ; Différents aspects du formalisme, in Frédéric Nef et Denis Vernant (eds), *Le Formalisme en question : Le tournant des années trente* (Paris : Vrin, 1998), 129-146.

non interprétées *a priori*, c'est pour le libérer d'un ancrage unique, l'ouvrir à d'autres ancrages, le varier, le multiplier, le propager selon des lignes de généralité grandissante.

La substitution à la référence extérieure de structures et de modèles mathématiques, incarnation du sens et lieu de la vérité, *internalise* les questions d'existence et de vérité, et installent une *circularité épistémologique*, désignée par Cavaillès dans la métaphore de la mathématique comme « volume riemannien [...] à la fois fermé et sans extérieur à lui (11) ». Sur le fond de cette circularité s'intensifient les mouvements de passages réciproques d'une discipline à l'autre et la coopération de diverses disciplines pour la résolution d'un problème, ainsi doué d'emblée d'une polymorphie sémantique. Ce phénomène de multiplication des interfaces internes aux mathématiques, si caractéristique des « mathématiques modernes », illustre concrètement le credo de l'autonomie et de la circularité. Credo que bien peu de mathématiciens ont rejeté. Poincaré, qui préconisait de diriger « du côté de la nature [...] le gros de l'armée » des mathématiciens, insistait simultanément et dans la même conférence sur l'indépendance du géomètre par rapport au physicien, sur la nécessité de « cultiver notre science pour notre plaisir » et le fait que les progrès de cette science découlent « des rapprochements inattendus entre ses diverses parties » (12).

Les historiens des mathématiques ont souvent manqué de voir que la rupture avec Dieu et avec la conception de la mathématique comme représentation du monde a laissé place nette pour une production endogène des significations. Pris au piège des évidences trompeuses, des polémiques intuitionnistes qui remontent à Hilbert ses mathématiques vides et ses formules sans signification (13), et de l'humour du philosophe britannique, Bertrand Russell, qui a popularisé cette opinion en une boutade célèbre (« les mathématiques sont une science où on ne sait pas de quoi on parle ni si ce qu'on dit est vrai »), beaucoup d'historiens ont donné sans réserve dans les oppositions structure/signification, logique/intuition, four-

(11) Jean Cavaillès, *Sur la logique et la théorie de la science*, 2^e éd. (Paris : PUF, 1960), 24.

(12) Voir Poincaré, *op. cit.* in n. 9, 168, 174.

(13) À quoi David Hilbert a répondu qu' « il n'est guère raisonnable d'exiger d'une façon générale que chaque formule singulière ait à elle seule une interprétation. Au contraire, c'est dans la nature d'une théorie [axiomatique] qu'on n'ait pas besoin de revenir, tout au travers de son développement, à l'intuition ou à la signification ». (Voir Largeault, *op. cit.* in n. 5, 158.)

nies en pâture par Brouwer et Poincaré respectivement. Même quelqu'un d'aussi subtil que Herbert Mehrtens croit devoir abonder dans le thème de la « perte du sens (14) ». Dommage pour une présentation – par ailleurs intéressante – des traits de la modernité à travers une multi-généalogie mathématique, sociologique, culturelle et institutionnelle !

On ne saurait mieux qu'Alfred Tarski faire, d'une façon qu'on aimerait définitive, le point sur le structuralisme mathématique. Citons en entier cette page au style à la fois simple et percutant :

« En construisant une théorie déductive, nous négligeons le sens des axiomes et ne prenons en considération que leur forme seulement. C'est pour cette raison que les gens en faisant allusion à ces phénomènes parlent du CARACTÈRE PUREMENT FORMEL des sciences deductives et de tous les raisonnements qu'on emploie dans ces sciences.

« De temps en temps on trouve des énoncés qui soulignent le caractère purement formel des mathématiques de manière paradoxale et exagérée ; bien que fondamentalement corrects, ces énoncés peuvent devenir source d'obscurité et de confusion. Ainsi on entend et même on lit occasionnellement qu'aucun contenu défini ne peut être attribué aux concepts mathématiques ; qu'en mathématiques nous ne savons pas réellement de quoi nous parlons, et que nous ne nous occupons pas de savoir si nos assertions sont vraies. On doit considérer de tels jugements d'un œil plutôt critique. Si, dans la construction d'une théorie, *on se comporte comme* quelqu'un qui n'aurait pas compris la signification des termes de cette discipline, *ce n'est pas du tout la même chose que de dénier à ces termes toute signification*. C'est un fait que nous développons quelquefois une théorie déductive sans attribuer un sens défini à ses termes primitifs, traitant alors ces derniers comme des variables ; dans ce cas nous disons que nous traitons la théorie comme SYSTÈME FORMEL. *Mais cette situation [...] ne se produit que lorsqu'il est possible de fournir plusieurs interprétations du système axiomatique de la théorie, c'est-à-dire s'il y a plusieurs moyens qui s'offrent d'attribuer des significations concrètes aux termes qui figurent dans la théorie, mais que nous n'avons pas l'intention d'accorder d'avance la préférence à aucune de ces significations particulières. Un système formel, d'autre part, pour lequel nous ne sommes pas en mesure de fournir une seule interprétation, serait, on peut le présumer, sans intérêt pour personne* (15). »

(14) Herbert Mehrtens, *Moderne Sprache Mathematik* (Frankfurt : Suhrkamp, 1990) : « Man musste auf das Bedeuten verzichten », p. 12 et : « Die Arbeit der Mathematiker macht nur den Zeichen bzw. den Marken auf dem Papier Vorschriften. Sie ist eine Sprache der puren Möglichkeit, und darum bedeutet sie nichts », p. 13.

(15) Alfred Tarski, *Introduction à la logique* (Paris-Louvain : Gauthier-Villars - Nauwelaerts, 1960), 113-114. (Les expressions en petites capitales sont ainsi écrites par Tarski ; les expressions en italique sont soulignées par nous.)

La philosophie s'est montrée généralement sensible au déploiement simultané de la forme et du contenu, du symbole et du sens. Pour Edmund Husserl, qui a lu Bolzano et tôt saisi la nouveauté philosophique de l'axiomatique hilbertienne, la matière de la science est tout entière signification (16) ; les concepts, armature des théories scientifiques, sont des « unités de signification idéale (17) ». Jean Cavaillès ou Gilles Deleuze, de leur côté, ont bien identifié la nature de la perte advenue avec la formalisation : perte de l'illusion essentialiste, mais non perte du sens. Le premier évoque la production toujours recommencée de concepts mathématiques comme une « fuite indéfinie vers le sens (18) ». Le second a repéré dans la structure « une machine à produire le sens (19) ». On peut même dire que jamais il n'a été autant question de vie et de circulation du sens dans et par les concepts mathématiques que depuis que l'on s'est détourné des essences, de la transcendance et du sujet. Le sens n'est ni principe, ni origine ; il est matière et résultat du travail mathématique, qui est, pour une part appréciable, un travail sur la langue. Que ce travail s'inscrive dans un contexte sociohistorique et institutionnel qui en conditionne l'exercice et le développement n'empêche pas de concevoir une certaine autonomie de son contenu. Conditionnés certes, mais non réductibles à leurs conditions, tels sont les produits du travail mathématique ; du moins, tels sont-ils compris par leurs producteurs.

III. — PRODUCTIVITÉ MATHÉMATIQUE DU LANGAGE SYMBOLIQUE

Le renouveau de la logique, au XIX^e siècle, est responsable du « tournant linguistique » de la pensée, mathématique comme philosophique. Le tournant linguistique découle et diffère du tournant

(16) « Toute science est, quant à sa teneur objective, en tant que théorie, constituée de cette matière homogène *unique* : elle est une complexion idéale de significations » (Edmund Husserl, *Recherches logiques*, « Première recherche : Expression et signification », trad. franç. (Paris : PUF, 1961, t. II, part. I), 111).

(17) *Ibid.*, 109.

(18) Cavaillès, *Sur la logique et la théorie de la science*, *op. cit.* in n. 11, 28.

(19) « Le structuralisme, consciemment ou non, célèbre des retrouvailles avec une inspiration stoïcienne et carollienne. La structure est vraiment une machine à produire le sens incorporel » (Gilles Deleuze, *Logique du sens* (Paris : Minuit, 1969), 88).

sémantique, inauguré par Bolzano. Il en découle parce que l'attention pour la langue accompagne nécessairement l'attention pour les significations objectives. L'analyse sémantique est toujours aussi une analyse de la langue, y compris chez Bolzano, qui cherche à fixer en expressions et procédures formelles précises les significations de la continuité (d'une fonction, d'un espace), de la dérivabilité, de la convergence, de la relation « être situé entre », et même de concepts réputés simples et évidents comme ligne, surface ou volume (pour la première fois dans l'histoire appréhendés comme ensembles de points). Mais c'est encore autre chose d'analyser thématiquement *le pouvoir de la langue dans la constitution de la connaissance* et de découvrir en retour la dimension éminemment symbolique de la réalité appréhendée par l'homme. Cela constitue véritablement le tournant linguistique dans la science mathématique, illustré dans l'essor de l'« algèbre moderne » et la généralisation des méthodes abstraites dans l'école de Göttingen.

Ce tournant est décisif et la majorité des mathématiciens, subjectivistes ou objectivistes, intuitionnistes ou formalistes, soulignent l'importance de la langue. Gauss, déjà, écrivait :

« C'est une caractéristique de la mathématique des temps modernes (contrairement à celle de l'Antiquité) que nous possédions par notre langue symbolique et le fait de donner des noms un levier, grâce auquel les argumentations les plus compliquées sont réduites à un certain mécanisme (20). »

Justement, toute la différence entre le traditionnel et le moderne est dans la conception par le premier d'une pensée indépendante du langage. Le second considère au contraire la langue et le symbolisme comme moment essentiel de la pensée, mathématique en particulier. Moment dédoublé selon que le symbolisme apparaît comme moteur, levier pour l'inventivité démonstrative ou lui-même matière à penser, à produire du sens. Le premier aspect est moderne depuis Viète, Descartes et Leibniz. Réflexion sur la langue intégrée à la production du savoir, le second est, avec Hilbert et Tarski, caractéristique de l'axiomatique et de la métamathématique. L'autoréflexion discursive, relevée par Cantor, se prolonge en analyse, à elle intégrée, de la structure syntaxique et sémantique du discours.

(20) Karl Friedrich Gauss, Lettre à Schumacher, 1850, citée dans Mehrrens, *op. cit.* in n. 14, 32.

Les deux aspects ne se laissent pas toujours séparer comme le montre le cas de Poincaré, que l'on placerait à mi-chemin entre Leibniz et Hilbert. Tout en insistant sur la libre initiative du mathématicien, Poincaré est d'avis que sans discours il n'y a pas d'objectivité (21). Par ailleurs, il relie de manière essentielle productivité mathématique et « innovations de langage ». Parmi les innovations de l'époque il y avait les mots de groupe et d'invariant, termes phares de la pensée structurale dont Poincaré n'a pas renié l'efficacité mathématique, mais seulement rejeté la circularité épistémologique : le fait qu'elle puisse s'autofonder sans secours extérieur. Conscient du rôle capital dans son propre travail et dans toute la mathématique moderne des concepts de groupe et d'invariant, Poincaré n'hésite pas à définir « la Mathématique [comme] l'art de donner le même nom à des choses différentes (22). » La mathématique est essentiellement un langage, la formule est bonne à condition de ne pas exiler la signification au-dehors du langage. Le mot-concept-structure rassemble des « faits » mathématiques différents par la matière, semblables par la forme. Poincaré a, au fond, la même évaluation que Hilbert de la méthode axiomatique : elle fait jouer la dialectique du même et de l'autre, elle installe et intensifie l'interconnexion de faits éloignés et de registres distincts (arithmétique, analyse, géométrie). On peut bien rabaisser, comme le fait Brouwer, le « pouvoir magique de la langue » à une simple

(21) Poincaré, *op. cit.* in n. 7, 179.

(22) « Nous venons de voir par un exemple quelle est l'importance des mots en mathématiques [...] La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. Il faut s'entendre. Il convient que ces choses, différentes par la matière, soient semblables par la forme, qu'elles puissent pour ainsi dire se couler dans le même moule. Quand le langage est bien choisi, on est tout étonné de voir que toutes les démonstrations, faites pour un objet connu, s'appliquent immédiatement à beaucoup d'objets nouveaux [...] »

« Le fait brut est quelquefois sans intérêt, on a pu le signaler bien des fois sans avoir rendu grand service à la science : il ne prend de valeur que le jour où un penseur mieux avisé aperçoit le rapprochement qu'il met en évidence et le symbolise par un mot.

« Les physiciens d'ailleurs agissent absolument de même : ils ont inventé le mot d'énergie, et ce mot a été prodigieusement fécond, parce que lui aussi créait la loi en éliminant les exceptions, parce qu'il donnait le même nom à des choses différentes par la matière et semblables par la forme.

« Parmi les mots qui ont exercé la plus heureuse influence, je signalerai ceux de groupe et d'invariant : ils nous ont fait apercevoir l'essence de bien des raisonnements mathématiques ; ils nous ont montré dans combien de cas les anciens mathématiciens considéraient des groupes sans le savoir, et comment se croyant bien éloignés les uns des autres, ils se trouvaient tout à coup rapprochés sans comprendre pourquoi » (Poincaré, *op. cit.* in n. 9, 171-172).

croyance (23). Mais, même si elle était fondée, cette critique ne serait pas dirimante. Car il est du ressort possible d'une croyance d'impliquer des attitudes, de déterminer des actes et de produire des effets tangibles. Croire au pouvoir de la langue dans un domaine qui n'existe que *dans* la langue incline à chercher les effets de langue capables de transformer des secteurs entiers dudit domaine.

La création, si caractéristique de la modernité, de nouvelles disciplines mathématiques par mise en correspondance des concepts primitifs de disciplines antérieures est un effet de l'importance accordée à la langue et surtout de la conception épistémologique nouvelle du rapport entre langue et fait. Pour Descartes, qui a promu la correspondance entre algèbre et géométrie, le rapport est d'*expression* et l'algèbre traduction simplificatrice de l'analyse des Anciens, simple langage. Il fallait réduire la géométrie à l'algèbre pour en parler plus aisément (24). À Poincaré (25), Hilbert ou Tarski la pratique des modèles fait préciser l'exercice de traduction d'une discipline dans une autre ou d'un système dans un autre comme *interprétation*, c'est-à-dire comme variation simultanée au niveau linguistique et au niveau sémantique. Il ne s'agit plus de réduire un langage à un autre, mais de parler plusieurs langages en même temps et de recueillir, dans l'un ou l'autre selon les commodités du problème et du moment, le sens surgi dans l'espace de cette pluralité. À partir du XIX^e siècle, la ramification sans précédent des mathématiques suit cette voie. Tarski, qui a donné une définition formelle du concept d'interprétation, issu de cette pratique, a élargi à la logique le cercle de l'autonomie mathématique. Aujourd'hui, la méthode de l'interprétation, plus que jamais utilisée, continue de prouver son efficacité dans les secteurs de pointe de la recherche mathématique. D'acquis de la modernité logico-mathématique qu'elle a été, elle est devenue un outil classique.

(23) Brouwer, in Largeault, *op. cit.* in n. 5, 263. Défendant une position strictement subjectiviste, selon laquelle les mathématiques ont une réalité purement mentale, Brouwer se place sur ce point à contre-courant de la modernité. Pour lui la langue n'est que le véhicule ou le vêtement extérieur de ces « images introspectives » que sont les vérités mathématiques. La « mathématique pure » a une existence extra-linguistique.

(24) Le 9 février 1639, René Descartes écrit au père Mersenne au sujet des travaux de Desargues sur les sections coniques : « Bien qu'il soit aisé de les expliquer [les coniques] plus clairement qu'Apollonius ni aucun autre, il est toutefois, ce me semble, fort difficile d'en rien dire sans l'Algèbre qui ne se puisse encore rendre beaucoup plus aisé par l'Algèbre. »

(25) L'interprétation des géométries non euclidiennes (1891), in *La Science et l'hypothèse* (Paris : Flammarion, 1968), 68 *sqq.*

IV. — L'INSTRUMENTALISATION

On observe dans la mathématique moderne une valorisation simultanée du langage et de l'utilité, intra ou extra-mathématique, des théories. La visée instrumentale domine au point qu'elle sert souvent de justification aux dépens de fondements plus théoriques. « Il est difficile et souvent impossible de préjuger exactement de la valeur d'un problème ; c'est, en effet, exclusivement le profit que tire la science de la solution du problème qui permet de porter un jugement sur la valeur de ce dernier », annonce Hilbert dans sa conférence de 1900 (26). Plus tard il dira que « le succès est la plus haute instance devant laquelle chacun plie (27) ». Et par succès d'une théorie ou d'une méthode mathématiques il faut entendre son « profit pour la science », l'étendue de son applicabilité à divers champs de problèmes, mathématiques d'abord, mais aussi physiques, biologiques, économiques, sociologiques, etc. Pas plus que la forme n'est l'ennemie du sens, l'applicabilité n'est le contraire de l'abstraction ; elle est bien plutôt son corollaire. Plus poussée est l'axiomatisation, plus facile est le transfert éventuel du schéma d'axiomes aux théories les plus diverses. L'applicabilité n'est donc pas seulement un impératif général extérieur ; elle est appelée de l'intérieur même de la conception axiomatique.

C'est pourquoi elle constitue un argument irrésistible. La logique elle-même s'y est rendue, automatiquement, pour ainsi dire, s'agissant de Hilbert qui considérait la métamathématique comme un genre nouveau de mathématique, de manière différée s'agissant de Tarski qui a commencé par apprécier en humaniste classique la valeur théorique de l'analyse logique (28). Et l'épistémologie mathématique de s'en emparer à son tour, en faisant du rendement une loi de tout développement scientifique, ainsi qu'on le voit à travers les réflexions de Georg Kreisel par exemple.

(26) Hilbert, *op. cit.* in n. 4, 59.

(27) David Hilbert, Über das Unendliche, *Mathematische Annalen*, 95 (1926), 163.

(28) Voir Sinaceur (1991), *op. cit.* in n. 10, part. IV, 322-324, ou Id., Logique : mathématique ordinaire ou épistémologie effective ?, in *Hommage à Jean-Toussaint Desanti* (Mauvezin : TER), 331-346.

La mathématique structurale compte ainsi au premier rang de ses impératifs le succès, le profit, le rendement, et au rang de ses principaux avantages, la mise en valeur du principe d'économie. Ce principe commande la généralisation tant recherchée des concepts et des démonstrations. D'une certaine façon, généraliser n'est que l'autre facette, peut-être préalable, d'appliquer au moindre coût. Si Dedekind et les hilbertiens font une promotion jusque-là inégalée du concept, ce n'est certes pas pour le « fétichiser », comme le leur reproche Brouwer, mais par esprit d'économie, pour éviter les longs calculs et la répétition de raisonnements particuliers, et ainsi permettre une meilleure « vision d'ensemble », bref une intuition panoramique. Le concept n'est pas seulement la matière propre du travail mathématique, il est aussi un *instrument* d'optimisation de ce travail. La « valeur » (*Wert*) d'un concept c'est sa valeur d'utilité, son efficacité (*Wirksamkeit*) écrit Dedekind, qui souligne le rôle moteur de la construction de concepts dans le développement des théories (29). Plus pragmatique et non moins moderne, Poincaré parle de faits et de mots, mais c'est à la même aune qu'en est mesurée l'importance : le rendement est proportionnel à la quantité de pensée économisée (30). L'importance de l'isomorphie, par exemple, tient à ce qu'elle permet de passer d'une structure à une autre « en économisant tout effort de pensée ». « On doit viser à l'économie de pensée » : c'est un impératif essentiel, dont la satisfaction produit secondairement ce sentiment d'élégance dont les mathématiciens font la pierre de touche des « bonnes » procédures. Les faits ont partie liée avec les mots. Les « faits à grands rendements » se reconnaissent à ce qu'ils permettent « ces heureuses innovations de langage » qui dévoilent l'essence d'une multitude de faits ou raisonnements. Réciproquement, « il suffit de changer de langage pour apercevoir des généralisations qu'on n'avait pas d'abord soupçonnées (31) ».

Poincaré renvoyait à la philosophie d'Ernst Mach pour conforter l'idée que le rôle de la science est de produire l'économie de pensée par la rationalisation des procédures et l'optimisation des efforts. Il aurait pu aussi bien reprendre à son compte la formule de Jeremy

(29) Dedekind, Leçon d'habilitation, 1854, *Gesammelte mathematische Werke* (Braunschweig : Vieweg, 1930-1932), III, 428 *sqq.*

(30) Voir Poincaré, *op. cit.* in n. 9, 169.

(31) Poincaré, *op. cit.* in n. 7, 107.

Bentham : « Des mots, tout dépend. » La forte liaison du langage et de l'économie, de la logique et de l'utilité remonte en effet à Bentham qui, à l'orée du XIX^e siècle, les a « systématiquement tressés en plusieurs parties de son œuvre, même dans celles qui paraissent les plus éloignées de son intense attention au langage (32) ». La plus « pure » des sciences, la mathématique, jusque dans ses avancées les plus éloignées de « la tyrannie du monde extérieur (33) », n'échappe point à la rationalité utilitariste dominante. L'utilité est intégrée à « la pensée pure ». Cela étonnera à peine de nos jours, encore qu'il vaille la peine de signaler le fait pour le début du siècle et pour une science où l'on verra d'un autre œil le déploiement de la formalisation et de l'axiomatisation. Que l'on réfléchisse aussi au lien profond du principe d'utilité et du pouvoir des mots. N'est-ce point l'inextricable nœud du réel et du symbolique qui fait encore et toujours, à bien des niveaux et dans toutes sortes de domaines, notre modernité ? En mathématiques, science toute symbolique, le pouvoir des mots n'est pas moins efficace dans l'organisation des théories que ne l'est le culte des symboles dans l'organisation des sociétés.

La querelle tradition/modernité est récurrente dans l'histoire des civilisations. Dire qu'elle est récurrente indique simultanément qu'elle ne surgit qu'à certains moments déterminés d'une histoire. Moments de bouleversements profonds, où il s'avère nécessaire de recomposer une identité. En mathématiques, il y a un sens à faire jouer l'opposition tradition/modernité pour l'époque qui voit « les méthodes abstraites » de la théorie des ensembles, de l'algèbre et de la topologie prendre le dessus sur celles de l'« analyse classique » et de la géométrie. Je crois avoir montré pourtant combien cette opposition est insignifiante au regard de tendances structurelles qui creusent leur sillon à travers les différences réelles et les contrastes polémiques. Le cas de Poincaré, qui se tient sur la crête de la modernité la plus avancée sans jamais perdre de vue les ressources accumulées par la tradition géométrique et la tradition analytique, est fort instructif de l'insignifiance d'une opposition, propre davantage à

(32) Christian Laval, *Jeremy Bentham : Le pouvoir des fictions* (Paris : PUF, 1994), « Philosophies », 6.

(33) Poincaré, *op. cit.* in n. 9, 172.

alimenter les controverses culturelles qu'à fournir un véritable outil à l'analyse épistémologique. Aujourd'hui, une telle opposition est bien moins pertinente, encore que la querelle ne soit jamais tout à fait éteinte, ravivée qu'elle fut en France, par exemple, par la réforme des programmes de l'enseignement primaire et secondaire des années soixante. Mais focalisons notre attention sur les pratiques plutôt que sur les justifications *a posteriori*. Nous voyons que, devenu classique, le « moderne » est assimilé par tous les mathématiciens, y compris ceux qui, agacés par l'abus de bourbakisme scolaire, prônent, au nom de la psychopédagogie, la contre-révolution de l'intuition euclidienne et la gymnastique du raisonnement informe (34).

(34) Voir, par exemple, René Thom, Les Mathématiques modernes : Une erreur pédagogique et philosophique ?, *L'Âge de la science*, 3, 225-236.